ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

Dans toute la composition, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Soit d un entier égal à 1 ou 2. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_d$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ formé des fonctions continues.

Le but du problème est de chercher les fonctions $f \in \mathcal{C}_2$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R} \quad f(x,y) = f(x+z, y+z), \qquad (T)$$

et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R} \quad f(x,y) + f(y,z) = f(x,z), \qquad (A)$$

c'est-à-dire les fonctions continues invariantes par translation diagonale et additives au sens de (A).

Partie I - Étude de l'invariance par translation

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_2$, constitué des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifient (T), forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

   Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $f, g \in \mathcal{T}_2$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a

   $$(\lambda f + g)(x,y) = \lambda f(x,y) + g(x,y) = \lambda f(x+z, y+z) + g(x+z, y+z) = (\lambda f + g)(x+z, y+z).$$

   De plus cet ensemble est non vide, car il contient la fonction identiquement nulle.

2. Soit $f \in \mathcal{T}_2$. Montrer que la fonction f vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,x) = f(y,y).$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors en posant $z = y - x$ on obtient

$$f(x,x) = f(x + (y-x), x + (y-x)) = f(y,y).$$

3. Montrer que si $f \in \mathcal{T}_2$, la fonction $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} |f(x,y)| & si & x < y, \\ |f(y,x)| & si & x \geq y. \end{array} \right. \end{array}$$

est encore invariante par translation diagonale, c'est-à-dire $g \in \mathcal{T}_2$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et soit $z \in \mathbb{R}$. Si $x < y$ alors on a

$$g(x,y) = |f(x,y)| = |f(x+z, y+z)| = g(x+z, y+z)$$

car $x + z < y + z$. Si $x \geq y$, on applique le même calcul. On remarque que les valeurs absolues ne perturbent aucunement le calcul.

4. Montrer que l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_2 & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(0,z) \end{array} \end{array}$$

définit un morphisme d'espace vectoriel.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit f et $g \in \mathcal{T}_2$, soit $z \in \mathbb{R}$ alors on a

$$\Phi(\lambda f + g)(z) = (\lambda f + g)(0,z) = \lambda f(0,z) + g(0,z) = \lambda \Phi(f)(z) + \Phi(g)(z).$$

Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a bien $\Phi(\lambda f + g) = \lambda \Phi(f) + \Phi(g)$.

5. Calculer le noyau $\mathcal{K}$ et l'image $\mathcal{I}$ du morphisme Φ.
Le noyau $\mathcal{K}$ est l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{T}_2$ telles que $f(0,z) = 0$ quelque soit le réel z. Or $f(0,z) = f(x, z+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc la fonction f vérifie qu'elle est identiquement nulle sur toutes les droites $D_z : y = z + x$. Or ces droites recouvrent tout le plan $\mathbb{R}^2$, donc f est identiquement nulle. Le noyau est réduit à l'élément nul.
Soit maintenant h une fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors on pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & h(y-x) \end{array}$$

alors pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $f(x+z, y+z) = h(y+z-(x+z)) = h(y-x) = f(x,y)$ donc $f \in \mathcal{T}_2$. Donc $\Phi(f) = h$, et Φ est surjectif. L'image de Φ est $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

6. Montrer que le morphisme Φ induit un isomorphisme linéaire du quotient $\mathcal{T}_2/\mathcal{K}$ sur $\mathcal{I}$. Calculer l'inverse Ψ de cet isomorphisme. Dans la définition de Ψ, on pourra identifier la fonction f à son représentant dans $\mathcal{T}_2/\mathcal{K}$ sans perte de généralité.

   La construction est naturelle. Comme Φ était déjà un isomorphisme, sa réciproque est évidemment

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \to & \mathcal{T}_2/\mathcal{K} \\ h & \mapsto & f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & h(y-x). \end{array} \end{array}$$

   La question reste toutefois indépendante de la question précédente, car on peut trouver la réciproque sans avoir exhibé le noyau ou l'image. En effet pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\Psi(h)(x,y) = \Psi(h)(0,y-x)$ par (T) et $\Psi(h)(0,y-x) = \Phi(\Psi(h))(y-x) = h(y-x)$.

7. Soit a un nombre réel. Montrer que l'application

$$\Phi_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_2 & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & f(z, a\ z) \end{array} \end{array}$$

   définit un morphisme d'espace vectoriel quel que soit $a \in \mathbb{R}$.

   La démonstration est semblable à la question 4.

8. Lorsque $a \neq 1$, précisez si ce morphisme est injectif ou surjectif. Si $a = 0$ alors à symétrie près, c'est l'isomorphisme précédent. Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, alors soit f dans le noyau, on a $f(z, az) = f(0,(a-1)z)$ quelque soit le réel z, donc f est nulle sur l'axe des ordonnées et invariante par translation, donc elle est nulle partout et c'est encore un morphisme injectif. Il est également surjectif car sa réciproque est donnée par

$$\Psi_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{T}_2 \\ h & \mapsto & f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & h\left(\frac{y-x}{a-1}\right). \end{array} \end{array}$$

   En effet pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\Psi_a(h)(x+z,y+z) = h\left(\frac{y+z-(x-z)}{a-1}\right) = h\left(\frac{y-x}{a-1}\right) = \Psi_a(h)(x,y),$$

   donc $\Psi_a(h) \in \mathcal{T}_2$. Et on a bien pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \Psi_a(\Phi_a(f))(x,y) &= \Phi_a(f)\left(\frac{y-x}{a-1}\right) = f\left(\frac{y-x}{a-1}, a\frac{y-x}{a-1}\right) \\ &= f\left(\frac{y-x}{a-1} - \frac{y-x}{a-1} + x, a\frac{y-x}{a-1} - \frac{y-x}{a-1} + x\right) \\ &= f\left(x, \frac{ay-ax-y+x+x(a-1)}{a-1}\right) \\ &= f\left(x, \frac{ay-ax-y+x+x(a-1)}{a-1}\right) = f(x,y). \end{aligned}$$

9. Montrer qu'il existe un réel a^* tel que $\mathrm{Im}(\Phi_{a^*})$ est l'ensemble des fonctions constantes.
   Si $a = 1$, on voit que $f(z,z) = f(0,0)$ par (T) donc $\Phi_1(f)(z) = f(z,z) = f(0,0)$ est une constante pour tout $z \in \mathbb{R}$. Donc l'image du morphisme est l'ensemble des fonctions constantes. Le a^* recherché est $a^* = 1$.
10. Quel est le noyau de Φ_{a^*} ?
    Le noyau est l'ensemble des fonctions f telles que $f(0,0) = 0$. Par invariance par translation, ce sont donc les fonctions qui valent 0 sur la diagonale principale de $\mathbb{R}^2$.

Partie II - Étude de l'additivité.

11. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_2$, constitué des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ qui vérifient (A), forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
    Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $f, g \in \mathcal{A}_2$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a
    $$(\lambda f+g)(x,y)+(\lambda f+g)(y,z) = \lambda f(x,y)+\lambda f(y,z)+g(x,y)+g(y,z) = \lambda f(x,z)+g(x,z) = (\lambda f+g)(x,z).$$
    De plus cet ensemble est non vide, car il contient la fonction identiquement nulle.
12. Soit $f \in \mathcal{A}_2$. Montrer que la fonction f vérifie
    $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x,x) = 0.$$
    Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,x)+f(x,y) = f(x,y)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x,x) = 0$.
13. On suppose que $f \in \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{C}_2$. Montrer que la suite
    $$S_N(f) = \sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$$
    converge quand $N \to +\infty$. Calculer sa limite.
    C'est une somme télescopique, donc $S_N(f) = f\left(\frac{1}{N+1}, 1\right)$ qui converge vers $f(0,1)$ car f est continue.
14. On suppose que f est positive, montrer que la fonction f est croissante par rapport à chacune de ces variables.
    Soient $(x,y,a,b) \in \mathbb{R}^4$ avec $a < x$ et $b < y$ alors
    $$f(x,y) = f(a,y) + f(x,a) \geq f(a,y) \quad \text{et} \quad f(x,y) = f(x,b) + f(b,y) \geq f(x,b)$$
    donc f est bien croissante par rapport à sa première et sa deuxième variable.

Partie III - Étude des fonctions continues vérifiant (T) et (A).

Soit $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$.

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(0,1).$$

Par additivité et translation

$$f(0,1) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{0}{n}, \frac{1}{n}\right) = nf\left(0, \frac{1}{n}\right).$$

16. Montrer pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f\left(x, x+\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(0,1).$$

Par additivité et translation

$$f\left(x, x+\frac{m}{n}\right) = f\left(0, \frac{m}{n}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{0}{n}, \frac{1}{n}\right) = mf\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} f(0,1).$$

17. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(0,x) = xf(0,1)$.
Par continuité et densité de $\mathbb{Q}$, la question précédente montre que $f(0,x) = xf(0,1)$ pour les $x \geq 0$. Pour les $x < 0$, il faut utiliser $f(0,-y) = -f(0,y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

18. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y-x)f(0,1)$.
C'est évident par invariance par translation.

19. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$, la suite suivante est convergente

$$S_N(g,f) = \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right) f\left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right)$$

Avec le résultat précédent c'est

$$S_N(g,f) = \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right) \frac{1}{N} f(0,1)$$

puisque g est continue, elle est bornée sur $[0,1]$, d'où $|S_N(g,f)| \leq \|g\|_\infty |f(0,1)|$ et la série est même absolument convergente.

20. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_1$, on a $S_N(g,f) \to f(0,1) \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ quand $N \to +\infty$.
C'est une somme de Riemann. Précisément c'est la méthode des rectangles à gauche.

21. Pour toute fonction g dérivable telle que $g' \in \mathcal{C}_1$ on définit la quantité suivante pour tout $x \in [0,1]$

$$D_N(g)(x) = \sum_{k=0}^{2^N-1} \left(g((k+1)2^{-N}) - g(k2^{-N})\right) 2^N \mathbb{1}_{[k2^{-N},(k+1)2^{-N}[}(x).$$

Montrer que la fonction $D_N(g)$ est bornée sur $[0,1]$ uniformément par rapport à $N \in \mathbb{N}^*$.
Au point $x \in [0,1]$, quel que soit $N \in \mathbb{N}^*$ la série n'est en fait constituée que d'un seul terme. L'unique terme de la série est l'accroissement de la fonction g autour du point x. Par le théorème des accroissements finis,

$$\left|\left(g((k+1)2^{-N}) - g(k2^{-N})\right) 2^N\right| \leq \sup_{x \in \left[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right]} |g'(x)| \leq \|g'\|_{\infty,[0,1]}.$$

22. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a $D_N(g)(x) \to g'(x)$.
Quel que soit x, et quel que soit $N \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $K_{x,N}$ tel que $x \in [K_{x,N}2^{-N}, (K_{x,N}+1)2^{-N}[$. Donc $D_N(g)(x) = \left(g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(K_{x,N}2^{-N})\right) 2^N$. Avec

$$\begin{aligned}
& \left(g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(K_{x,N}2^{-N})\right) 2^N - g'(x) \\
= & \left(g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(x)\right) 2^N + \left(g(x) - g(K_{x,N}2^{-N})\right) 2^N \\
= & \left(g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(x)\right) 2^N + \left(g(x) - g(K_{x,N}2^{-N})\right) 2^N \\
- & g'(x)((K_{x,N}+1)2^{-N} - x + x - K_{x,N}2^{-N})2^N \\
= & \left[g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(x) - g'(x)((K_{x,N}+1)2^{-N} - x)\right] 2^N \\
- & \left[g(K_{x,N}2^{-N}) - g(x) - g'(x)(K_{x,N}2^{-N} - x)\right] 2^N \\
= & \left[\frac{g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(x)}{((K_{x,N}+1)2^{-N} - x)} - g'(x)\right] ((K_{x,N}+1) - x2^N) \\
- & \left[\frac{g(K_{x,N}2^{-N}) - g(x)}{(K_{x,N}2^{-N} - x)} - g'(x)\right] (K_{x,N} - x2^N)
\end{aligned}$$

Comme $|K_{x,N}2^{-N} - x| \leq 2^{-N}$ et $|(K_{x,N}+1)2^{-N} - x| \leq 2^{-N}$, on peut conclure en remarquant que chaque terme est similaire à un reste d'ordre 2 d'un développement de Taylor. Mais comme la fonction n'est pas deux fois dérivable, il faut préciser que $\left[\frac{g((K_{x,N}+1)2^{-N}) - g(x)}{((K_{x,N}+1)2^{-N} - x)} - g'(x)\right]$ converge vers 0 et que $((K_{x,N}+1) - x2^N)$ est bornée par 1. Donc le produit tend vers 0. Le deuxième terme se traite de la même manière.

23. Pour toute fonction g dérivable telle que $g' \in \mathcal{C}_1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{A}_2$ non-nulle, calculer la limite de

$$I_N(g,f) = \sum_{k=0}^{2^N-1} g'\left(\frac{k}{2^N}\right) f\left(\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}\right) / f(0,1)$$

en fonction de f et g.

Avec le résultat précédent c'est

$$I_N(g,f) = \sum_{k=0}^{2^N-1} g'\left(\frac{k}{2^N}\right)\frac{1}{2^N}$$

qui converge vers $\displaystyle\int_0^1 g'(x)dx = (g(1) - g(0))$.

24. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ la quantité

$$R_N(g,f) = \int_0^1 D_N(g)(x)dx - I_N(g,f).$$

converge vers 0 quand $N \to +\infty$.

En calculant l'intégrale de $D_N(g)$ on trouve une somme télescopique qui vaut $g(1) - g(0)$. Puisque $I_N(g,f)$ converge vers $g(1) - g(0)$, c'est évident.

2 Problème d'algèbre

L'objet du problème est l'étude des commutateurs de deux éléments dans les espaces vectoriels. Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note $\mathbf{0}_E$ le vecteur nul de E et $\mathbf{id}_E$ l'endomorphisme identité de E.

Soient f et g deux endomorphismes de E, avec la notation $\circ$ pour définir la composition, on pose

$$f^0 = \mathbf{id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^3 = f \circ f \circ f, \text{ etc }.$$

et on définit $[f,g]$ le commutateur de f et g par la quantité

$$[f,g] = f \circ g - g \circ f.$$

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de E noté en ligne, on note x^T sa transposée qui forme donc un vecteur colonne. Cette notation s'applique également à tout autre élément de E apparaissant dans la suite de l'énoncé. On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k.

Si f est un endomorphisme de E et si

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k.$$

Partie I

1. Soit une suite de réels $a_{2k} = 2^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $a_{2k+1} = 0$. Calculer le rayon de convergence de la série entière définie pour $z \in \mathbb{C}$ par
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$
La série décrit $\dfrac{1}{1-(\sqrt{2}x)^2}$. On peut appliquer la règle de Cauchy. Le rayon vaut $1/\sqrt{2}$.

2. Soit une suite de complexes $a_k = \dfrac{(-i)^k(k+i)}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Calculer le rayon de convergence de la série entière définie pour $z \in \mathbb{C}$ par
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$
C'est un résultat classique. Par le critère de d'Alembert, le rayon est infini.

3. Montrer que $[f, g]$ est un endomorphisme de E.
Soient x et $y \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a
$$\begin{aligned}[][f,g](x+\lambda y) &= f(g(x+\lambda y)) - g(f(x+\lambda y)) \\ &= f(g(x)) + \lambda f(g(y)) - g(f(x)) - \lambda g(f(y)) = [f,g](x) + \lambda [f,g](y).\end{aligned}$$

4. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une série entière donnée sans coefficient nul. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ par
$$P_k(X) = a_k X^k.$$
Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que si $[f, g] = \mathbf{0}_E$, il existe une suite $(b_{k,N})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que
$$P_N(f+g) = \sum_{k=0}^{N} b_{k,N} P_k(f) \circ P_{N-k}(g)$$
$P_N(f+g) = a_N \sum_{k=0}^{N} C_N^k f^k \circ g^{N-k}$ donc $P_N(f+g) = \sum_{k=0}^{N} a_N C_N^k \dfrac{1}{a_k}\dfrac{1}{a_{N-k}} P_k(f) \circ P_{N-k}(g)$.

5. Dans le cas $a_k = \dfrac{1}{k!}$ et $[f, g] = \mathbf{0}_E$. Montrer que $b_{k,N} = 1$ pour tout k et pour tout $N \in \mathbb{N}$.
Avec le calcul précédent
$$b_{k,N} = \frac{1}{N!}\frac{N!}{k!(N-k)!}k!(N-k)! = 1.$$

6. Dans le cas $a_k = \frac{1}{k!}$ et $[f, g] \neq \mathbf{0}_E$. Montrer que $P_2(f+g) - \sum_{k=0}^{2} P_k(f) \circ P_{2-k}(g) = \frac{1}{2}[g, f]$.

   On a

   $P_2(f+g) = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f \circ g + \frac{1}{2}g \circ f + \frac{1}{2}g^2 = P_2(f) + \frac{1}{2}P_1(f) \circ P_1(g) + \frac{1}{2}P_1(g) \circ P_1(f) + P_2(g)$

   donc

   $$P_2(f+g) - \sum_{k=0}^{2} P_k(f) \circ P_{2-k}(g) = \frac{1}{2}P_1(g) \circ P_1(f) - \frac{1}{2}P_1(f) \circ P_1(g) = \frac{1}{2}[g, f].$$

7. Montrer que $F_N = \sum_{k=0}^{N} P_k(f)$ converge quand N tend vers $+\infty$ vers un endomorphisme.

   La suite est de Cauchy. On choisit une norme sur $\mathcal{L}(E, E)$ qui soit multiplicative et on a

   $$\|F_N(f) - F_{N+p}(f)\| \leq \sum_{k=N+1}^{N+p} a_k \|f^k\| \leq \sum_{k=N+1}^{N+p} a_k \|f\|^k$$

   qui est majoré par le reste d'une série absolument convergente (la fonction exponentielle).

Partie II

8. Soit x un élément non nul de E et y un élément de E. Montrer qu'il existe au moins une matrice réelle M_0 de taille $n \times n$ tels que

   $$M_0 \; x^T = y^T$$

   Soit i un indice tel que $x_i \neq 0$ alors une matrice en colonne i avec des coefficients y_j/x_i convient.

9. Montrer que le choix de la matrice n'est pas unique si $n \geq 2$. C'est-à-dire qu'il existe au moins un élément $z \in E$ avec $z \neq \mathbf{0}_E$, et deux matrices réelles distinctes M et N de tailles $n \times n$ telles que

   $$Mz^T = Nz^T.$$

   Prendre deux matrices M et N telles que $Ker(M - N)$ n'est pas réduit à l'élément nul. Par exemple pour tout $z \in E$ avec $z \neq \mathbf{0}_E$, les matrices $M = ||z||^2\mathbf{id}_E$ et $N = z^T z$ conviennent.

10. Soit f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe une matrice M de taille $n \times n$ telle que pour tout $y \in E$,

    $$My^T = f(y)^T.$$

    C'est la matrice canonique de l'endomorphisme. Les questions précédentes tentent de tester le candidat sur l'ordre des quantificateurs.

11. Montrer que la matrice construite à la question précédente est unique. Pour chaque endomorphisme f de E, on notera alors M_f la matrice associée par la construction précédente.
    Soit M et N deux matrices qui conviennent alors pour tout $x \in \mathbb{E}$ $(M - N)x^T = 0$, donc $Ker(M - N) = E$. Par le théorème du rang, la matrice $M - N$ a donc pour image $\{0\}$, c'est donc bien la matrice nulle.

12. Montrer que l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} (\text{Endomorphismes}(E), +, \circ) & \longrightarrow & (\text{Matrices réelles de taille } n \times n, +, \times) \\ f & \mapsto & \Phi(f) = M_f \end{array} \right.$$

est un morphisme d'anneau.
$\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g)$ et la question précédente.

13. Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que

$$\Phi([f,g]) := M_{[f,g]} = M_f \times M_g - M_g \times M_f.$$

On utilise la question précédente sur le morphisme d'anneau.

Partie III

Pour f un endomorphisme de E, on note C_f l'ensemble des endomorphismes g de E tels que $M_{[f,g]}$ est la matrice identiquement nulle, c'est-à-dire

$$C_f := \{g : E \to E \text{ endomorphisme } : M_f \times M_g = M_g \times M_f\}.$$

14. Pour $f = \mathbf{id}_E$, montrer que $C_{\mathbf{id}_E}$ est constitué de l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$.
Toute matrice commute avec l'identité.
15. Montrer que C_f est un sous-groupe additif des matrices réelles de taille $n \times n$.
Soient M et $N \in C_f$ alors $(M+N)M_f = MM_f + NM_f = M_f M + M_f N = M_f(M+N)$.
16. Montrer que C_f est un sous-anneau des matrices réelles de taille $n \times n$.
Soient M et $N \in C_f$ alors $(MN)M_f = MNM_f = MM_f N = M_f MN = M_f(MN)$.
17. Montrer que C_f est un sous-espace vectoriel des matrices réelles de taille $n \times n$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $M, N \in C_f$ alors on a

$$(\lambda M + N)M_f = \lambda M M_f + N M_f = M_f(\lambda M + N)$$

18. Soit D une matrice diagonale de taille 2×2 et d l'endomorphisme associé par la base canonique. Montrer que

$$d \in \mathbb{R}.\mathbf{id}_E \quad \Longrightarrow \quad C_d = \mathcal{M}_{2,2},$$

et

$$d \notin \mathbb{R}.\mathbf{id}_E \quad \Longrightarrow \quad C_d = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) : a, d \in \mathbb{R}, b = c = 0 \right\}.$$

La première étape est la question 14 étendue à toutes les homothéties. La deuxième est un simple calcul.

19. Soit f un endomorphisme dont la matrice M_f est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice de passage R et une matrice diagonale D telles que

$$M_f = R^{-1} D R$$

Montrer que si $g \in C_f$ et M_g est diagonalisable, alors il existe une matrice de passage Q, une matrice diagonale Δ et une matrice diagonale $\widetilde{D}$ telle que

$$M_g = Q^{-1}\Delta Q \quad \text{ et } \quad M_f = Q^{-1}\widetilde{D}Q.$$

C'est la codiagonalisabilité.

20. Montrer qu'il existe une matrice S telle que $\widetilde{D} = S^{-1}DS$.

Les deux matrices diagonales possèdent les mêmes valeurs propres. Donc il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ qui passe de l'ensemble $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ vers l'ensemble $(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \cdots, \tilde{d}_n)$ avec $\tilde{d}_i = d_{\sigma(i)}$. On note S la matrice associée à cette permutation alors $Se_i = e_{\sigma(i)}$. On a donc pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$S\widetilde{D}e_i = S\tilde{d}_i e_i = \tilde{d}_i e_{\sigma(i)} = d_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)} = De_{\sigma(i)} = DSe_i.$$

Donc les matrices $S\widetilde{D}$ et DS sont égales sur la base $(e_1, e_2, \cdots e_n)$ donc elles sont égales.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

Corrigé de la 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

On considère la fonction f définie sur R par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

1. Etudier la convexité de *f*.

Comme la fonction est deux fois dérivables, la convexité est liée au signe de sa dérivée seconde.

On obtient $f''(x) = \dfrac{e^x (1-x)(-x^3+3x^2-5x-1)}{(1+x^2)^3}$. Soit $z = -x^3+3x^2-5x-1$, on a : $z' = -3x^2+6x-5 < 0$. La fonction z est donc strictement décroissante de R dans R, avec $z(-1) > 0$ et $z(0) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists! \alpha \in \left]-1,0\right[\ / \ z(\alpha) = 0$.

La dérivée seconde de *f* s'annule donc pour α et 1.

En conclusion, *f* est convexe pour $x > 1$ et $x < \alpha$, concave entre ces deux valeurs.

2. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La dérivée de *f* est égale à : $f'(x) = \dfrac{(1-x)^2 e^x}{(1+x^2)^2} > 0$. On a toujours $f' > 0$ et $f'(1) = 0$. La fonction est donc strictement croissante de R sur R^{+*}, avec une branche parabolique dans la direction verticale en $+\infty$ et avec l'axe horizontal comme asymptote à $-\infty$. Son graphe admet une tangente horizontale en 1.

3. Soit la fonction h définie sur R par : $h(x) = e^{-x} f(x)$. Calculer $I = \int_0^1 h(x)h(-x)\,dx$

On a : $I = \int_0^1 h(x)h(-x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)}dx = [Arctg\ x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

D'où $I = \int_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}dx = J - \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}.x\,dx$. Puis on intègre par parties cette dernière intégrale pour obtenir : $I = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{-x/2}{1+x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}J = \frac{\pi+2}{8}$

Exercice n° 2

Soit la fonction numérique f_α définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha + Ln(1+x^2)$, où α est un nombre réel quelconque et *Ln* désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer le domaine de définition de f_α selon les valeurs de α .

Si $\alpha \in N, Df_\alpha = R$,
Si $\alpha \in Z^-, Df_\alpha = R^*$,
Si $\alpha \notin Z, Df_\alpha = R^{+*}$, (on rappelle que $x^\alpha = e^{\alpha\, Ln\, x}$)

2. Etudier les variations et tracer les graphes de f_1 et f_2. Comparer ces deux graphes sur R^+.

La fonction f_1 est strictement croissante de R sur R avec $f_1(0) = 0$ et une branche parabolique dans la direction verticale. On a : $f_1{}'(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$

La fonction f_2 est paire et strictement croissante de R^+ sur R^+ avec $f_2(0) = 0$ et une branche parabolique dans la direction verticale. On a : $f_2{}'(x) = \frac{2x(2+x^2)}{1+x^2}$

Sur R^+, $f_2(x) \geq f_1(x) \Leftrightarrow x(x-1) \Leftrightarrow x \geq 1$. Entre 0 et 1, c'est l'inverse.

3. Etudier la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f_1(u_n)$ et $u_0 > 0$

Si la suite (u_n) converge vers une limite finie *l*, alors cette limite doit vérifier $l = l + Ln(1+l^2)$ d'où *l*=0. Mais on a : $u_{n+1} = f_1(u_n) > u_n > 0$ $(f_1(x) \geq x)$. La suite ne peut donc converger vers 0 et elle tend vers $+\infty$.

4. Etudier la suite (v_n) définie par : $v_{n+1} = f_2(v_n)$ et $v_0 > 0$

La suite (v_n) vérifie $v_{n+1} = v_n^2 + Ln(1+v_n^2)$ et cette suite est toujours strictement positive.
Si $(v_n) \to l$, alors $l = l^2 + Ln(1+l^2)$. Zéro est une racine évidente de cette équation.
Soit $u = x^2 - x + Ln(1+x^2)$, sa dérivée est égale à $u' = 2x - 1 + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x^3 - x^2 + 4x - 1}{1+x^2}$ et elle est du signe du numérateur, noté *nu*, dont la dérivée est strictement positive. Et *nu* est négatif en zéro et positif en 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $l_1 \in]0,1[$ qui annule *nu*. Donc il existe $l_2 \in]l_1, 1[$ tel que $f_2(l_2) = l_2$.
Comme f_2 est convexe, son graphe est en dessous de la bissectrice entre 0 et l_2, et au-dessus pour $x > l_2$. Par conséquent, si $v_0 < l_2$, la suite (v_n) est décroissante, car $v_{n+1} = f_2(v_n) < v_n$ et elle est minorée par 0, donc elle converge vers 0.

Si $v_0 > l_2$, la suite (v_n) est croissante et non majorée, elle tend vers $+\infty$.
Si $v_0 = l_2$, la suite (v_n) est stationnaire.

5. Pour $n \in N$, on pose : $I_n = \int_1^n f_n(x)\,dx$

- Calculer I_2
- Etudier la suite (I_n)

Calculons directement I_n.

$$I_n = \int_1^n x^n + Ln(1+x^2)\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^n + \left[x\,Ln(1+x^2)\right]_1^n - \int_1^n \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$I_n = \frac{n^{n+1}-1}{n+1} + n\,Ln(1+n^2) - Ln\,2 - 2(n-1) + 2\,(Arctg\;n - \frac{\pi}{4})$$

D'où $I_2 = \frac{1}{3} + Ln(\frac{25}{2}) + 2\,(Artg\;2 - \frac{\pi}{4})$ et

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}(n^n + 2n\,Ln\,n) = +\infty$$

Exercice n° 3

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où α et β sont des paramètres réels.

1. Etudier la diagonalisation de M selon les valeurs de α et β.

On a : $\det(M - \lambda I) = (1-\lambda)(\alpha - \lambda - \beta)(\alpha - \lambda + \beta)$, la matrice admet donc trois valeurs propres réelles : 1, $(\alpha - \beta), (\alpha + \beta)$. Cette matrice est trigonalisable dans tous les cas et la diagonalisation va dépendre de l'ordre de multiplicité des valeurs propres et de la dimension des sous espaces propres associés.

- Cas 1 : 3 valeurs propres confondues

Dans ce cas : $1 = (\alpha - \beta) = (\alpha + \beta)$, d'où $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. La dimension du sous espace propre étant égale à deux, la matrice n'est pas diagonalisable.

- Cas 2 : 3 valeurs propres distinctes

Dans ce cas la matrice est diagonalisable avec $1 \neq (\alpha - \beta); 1 \neq (\alpha + \beta); (\alpha - \beta) \neq (\alpha + \beta)$, c'est à dire $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 0$.

- Cas 3 : Seulement deux valeurs propres identiques

a) $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha - \beta \neq 1$ (1 valeur propre double) et le sous espace propre associé à 1 est engendré par le vecteur $(x, x, 0)$ de dimension 1, la matrice n'est pas diagonalisable.

b) $\alpha - \beta = 1$ et $\alpha + \beta \neq 1$, cas similaire au précédent et la matrice n'est pas diagonalisable.

c) $\alpha + \beta = \alpha - \beta \neq 1$, ce qui implique $\beta = 0$ et $\alpha \neq 1$, la dimension du sous espace propre associé à α est de dimension deux et la matrice est diagonalisable.

En conclusion M est diagonalisable si et seulement si les trois valeurs propres sont distinctes ou si ($\alpha \neq 1, \beta = 0$).

2. On suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

Calculer, pour tout $n \in N$, M^n et $(M + I)^n$, où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

On vérifie par récurrence que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Comme $M\ I = I\ M$, on a : $(M + I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k M^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} C_n^k & 0 & \sum_{k=0}^{n} k\,C_n^k \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} C_n^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n} C_n^k \end{pmatrix}$

Par ailleurs, $(1+x)^n = \sum_k C_n^k\, x^k$ et pour x=1, $2^n = \sum_k C_n^k$

Soit $y = (1+x)^n = \sum_k C_n^k\, x^k$, alors $y' = n(1+x)^{n-1} = \sum_k k\,C_n^k\, x^{k-1}$ et pour x=1, $n\,2^{n-1} = \sum_k k\,C_n^k$

En conclusion : $(M + I)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n\,2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

3. On suppose $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, \alpha - \beta \neq 1$

Calculer M^n, pour tout $n \in N$.

Dans ce cas, la matrice n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable.

$\lambda = 1$ est une valeur propre double et le sous espace propre associé est engendré par $u_1 = (1,1,0)$

On cherche alors un vecteur u_2 tel que : $M\,u_2 = u_1 + u_2$ et la résolution du système suivant : $\begin{cases} \alpha\,x + \beta\,y + \alpha\,z = 1 + x \\ \beta\,x + \alpha\,y + \beta\,z = 1 + y \\ \qquad\qquad z = z \end{cases}$ donne z=2 et $\beta\,x - \beta\,y = 1 - 2\,\beta$. On peut choisir $u_2 = ((1-2\beta)/\beta, 0, 2)$

Pour $\lambda = \alpha - \beta$, le sous espace propre associé est engendré par $u_3 = (1,-1,0)$, qui est bien orthogonal à u_1.

La matrice M est donc semblable à la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\beta \end{pmatrix}$ dans la base (u_1, u_2, u_3).

On vérifie par récurrence que $J^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\beta)^n \end{pmatrix}$. Par conséquent $M^n = P\,J^n\,P^{-1}$, où

P est la matrice de passage, à savoir $P = \begin{pmatrix} 1 & (1-2\,\beta)/\beta & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et sa matrice inverse est :

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -(1-2\beta)/\beta \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -(1-2\beta)/\beta \end{pmatrix}$$

On obtient $M^{n} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2(1-2\beta)^n & 2-2(1-2\beta)^n & 2n+\frac{1-2\beta}{\beta}-\frac{(1-2\beta)^{n+1}}{\beta} \\ 2-2(1-2\beta)^n & 2+2(1-2\beta)^n & 2n-\frac{1-2\beta}{\beta}+\frac{(1-2\beta)^{n+1}}{\beta} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice n° 4

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $V = {}^tM\,M$, où ${}^tM$ désigne la transposée de la matrice M.

On obtient pour matrice de variance-covariance $V = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Déterminer les valeurs propres de la matrice V.

La matrice étant symétrique, elle est diagonalisable et $\det(V-\lambda I) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 2)$. Les trois valeurs propres sont : $2, 4 \pm \sqrt{14}$

3. Trouver un vecteur unitaire u de R^3 tel que $V\,u = 2\,u$

Le vecteur u sera donc un vecteur propre associé à la valeur propre 2, à savoir $u = \frac{1}{\sqrt{10}}(0,1,3)$

4. Déterminer la matrice de la projection orthogonale, dans R^3, sur la droite vectorielle D engendrée par u.

La matrice de la projection orthogonale P est égale à : $P = u\ ({}^tu\,u)^{-1}\ {}^tu = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

5. Si chaque ligne de la matrice *M* correspond à une observation, quelle est l'observation dont la projection orthogonale sur *D* a la plus grande longueur ?

Notons *a*, *b,* *c* et *d* les 4 observations (lignes de la matrice *M*), on a $Pa = \frac{1}{10}(0,3,9)$; $Pb = \frac{1}{10}(0,-1,-3)$; $Pc = \frac{1}{10}(0,-3,-9)$; $Pd = \frac{1}{10}(0,1,3)$. Les projections de *a* et *c* sont opposées et ont la plus grande longueur.

6. Déterminer les vecteurs propres de la matrice *V.*

On sait déjà que *u* est un vecteur propre pour la valeur propre 2.

Pour $\lambda = 4 + \sqrt{14}$, on doit résoudre le système suivant :

$\begin{cases} (2-\sqrt{14})\,x - 3\,y + z = 0 \\ -3\,x + (-2-\sqrt{14})\,y = 0 \\ x + (-2-\sqrt{14})\,z = 0 \end{cases}$ pour obtenir $y = \frac{-3x}{2+\sqrt{14}}$; $z = \frac{x}{2+\sqrt{14}}$. On peut choisir comme vecteur propre $u_2 = (2+\sqrt{14}, -3, 1)$.

De façon analogue pour $\lambda = 4 - \sqrt{14}$, on peut choisir $u_3 = (-2+\sqrt{14}, 3, -1)$. On peut remarquer que ces vecteurs sont bien orthogonaux.

7. Résoudre $Max\ \left\{ {}^t v V v \ / v \in R^3, \|v\| = 1 \right\}$

En « normant » les vecteurs propres précédents, la matrice *V* est semblable à la matrice diagonale Δ dans le groupe orthogonal, où $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4+\sqrt{14} & 0 \\ 0 & 0 & 4-\sqrt{14} \end{pmatrix}$.

Par conséquent

$$Max\ \left\{ {}^t v V v \ / v \in R^3, \|v\| = 1 \right\} = Max\ \left\{ {}^t w \Delta w \ / w \in R^3, \|w\| = 1 \right\} = Max\ \left\{ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, w_i \ / \sum_{i=1}^{3} w_i^{\,2} = 1 \right\}$$

Ce maximum est majoré par la plus grande valeur propre et ce maximum est atteint pour le vecteur propre associé à celle valeur, en conclusion : $Max\ \left\{ {}^t v V v \ / v \in R^3, \|v\| = 1 \right\} = 4 + \sqrt{14}$

Exercice n° 5

Pour $x \in R$, on considère l'intégrale généralisée : $K(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} dt$

1. Montrer que $K : x \mapsto K(x)$ définit une application de R dans R et étudier sa parité.

Pour $t \geq a > 0$, on a : $0 \leq \frac{\sin^2(tx)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, et $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, donc l'intégrale proposée converge en $+\infty$

Au voisinage de zéro, $0 \leq \frac{\sin^2(tx)}{t^2} \leq \frac{t^2 x^2}{t^2} = x^2$ et $\int_0^a x^2\, dt$ converge.

En conclusion, K est bien définie.
De plus, $K(-x) = K(x)$ et la fonction est paire.

2. Pour $x>0$, calculer $K(x)$ en fonction de $K(1)$ que l'on ne cherchera pas à calculer et en déduire l'expression de $K(x)$ pour tout $x \in R$.

On pose $u = tx$, d'où $K(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du = x\, K(1)$

Et avec la parité, pour $x \in R$, $K(x) = |x|\, K(1)$

3. Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2 (1+t^2)} dt$.

- Montrer que F est bien définie sur R.
- Trouver un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (on pourra comparer F et K).

Pour $t \geq a > 0$, on a : $0 \leq \frac{\sin^2(tx)}{t^2 (1+t^2)} \leq \frac{1}{t^4}$, et $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt$ converge, donc l'intégrale proposée converge en $+\infty$.

Au voisinage de zéro, $0 \leq \frac{\sin^2(tx)}{t^2 (1+t^2)} \leq \frac{t^2 x^2}{t^2} = x^2$ et $\int_0^a x^2\, dt$ converge.

En conclusion, F est bien définie.

$F(x) - K(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} \left(\frac{1}{1+t^2} - 1 \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{-\sin^2(tx)}{1+t^2} dt$ et $0 \leq \frac{\sin^2(tx)}{(1+t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2}$, l'intégrale de cette majoration est égale à $\frac{\pi}{2}$, d'où $|F(x) - K(x)| \leq \frac{\pi}{2}$.

Pour $x \neq 0$, $K(x) = |x|\, K(1) \neq 0$, d'où $\left| \frac{F(x)}{K(x)} - 1 \right| \leq = \frac{|F(x) - K(x)|}{|x|\, K(1)} \leq \frac{\pi}{2K(1)} \cdot \frac{1}{|x|}$

En conclusion, au voisinage de $+\infty$, on a : $F(x) \approx x\, K(1)$ et au voisinage de $-\infty$, on a : $F(x) \approx -x\, K(1)$

4. Soit $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2tx)}{t\,(1+t^2)} dt$

- Montrer que G est convergente.

On procède exactement de la même façon que pour les fonctions *K* et *F*.

- Pour $x, h \in R$, monter l'inégalité suivante : $\left|\sin^2(t(x+h)) - \sin^2(tx) - th\sin(2tx)\right| \leq h^2 t^2$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a pour une fonction deux fois continument dérivables :

$f(a+b) - f(a) - b f'(a) = \int_a^{a+b} (a+b-t) f''(t)\,dt$ que l'on applique à $f(x) = \sin^2(x)$ pour obtenir : $\sin^2(a+b) - \sin^2(a) - b\sin(2a) = 2\int_a^{a+b} (a+b-t)\cos(2t)\,dt$, d'où

$$\left|\sin^2(a+b) - \sin^2(a) - b\sin(2a)\right| \leq 2\left|\int_a^{a+b} (a+b-t)\cos(2t)\,dt\right|$$

Pour $b \geq 0$, $\left|\int_a^{a+b} (a+b-t)\cos(2t)\,dt\right| \leq \int_a^{a+b} (a+b-t)\,dt = \frac{b^2}{2}$

Pour $b < 0$, $\left|\int_a^{a+b} (a+b-t)\cos(2t)\,dt\right| \leq \int_{a+b}^{a} (t-a-b)\,dt = \frac{b^2}{2}$

Puis en posant Pour $a = tx$ et $b = th$, on obtient la relation demandée.

- Montrer que *F* est dérivable et que sa dérivée est égale à *G*.

On a :

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin^2(t(x+h)) - \sin^2(tx) - th\sin(2tx)}{ht^2(1+t^2)}\right| dt \leq |h| \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{|h|\pi}{2}$$

Et cette dernière expression tend vers zéro quand *h* tend vers zéro, la fonction *F* admet donc *G* comme dérivée.

- Montrer que *G* est continue.

On a : $G(x+h) - G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t(x+h)) - \sin(2tx)}{t(1+t^2)}\,dt$ et

$\sin(2t(x+h)) - \sin(2tx) = 2\sin(th)\cos(t(2x+h))$, d'où

$\left|G(x+h) - G(x)\right| \leq 2h\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)}\,dt \to 0$ quand $h \to 0$ et la fonction est continue.

Exercice n° 6

1. Soit $M : (a,b,c) \in C^3 \mapsto M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 3c & 3b \\ b & a & 3c \\ c & b & a \end{pmatrix}$, où *C* désigne l'ensemble des nombres complexes. Montrer que *M* est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre C^3 et $E = \{M(a,b,c) \ / \ (a,b,c) \in C^3\}$ et déterminer une base de *E*.

On vérifie aisément que l'application *M* est linéaire et bijective.

On a : $M\,(a,b,c) = a\,I + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a\,I + b\,U + c\,V$ et ces trois matrices sont indépendantes, donc elles forment une base de *E*.

2. Soit la matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer U^n pour tout $n \in N$

On calcule $U^2 = V;\, U^3 = V\,U = U\,V = 3\,I; U^4 = 3U$ et on vérifie par récurrence les résultats suivants : $U^{3n} = 3^n\, I;\, U^{3n+1} = 3^n\, U;\, U^{3n+2} = 3^n\, V$

3. Calculer $M\,(a,b,c) \times M\,(a,\, jb,\, j^2 c) \times M\,(a,\, j^2 b,\, jc)$, où j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $2\pi/3$.

On a : $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1 + j + j^2 = 0;\; j^3 = 1$. En utilisant ces résultats, on obtient :

$$M\,(a,b,c) \times M\,(a,\, jb,\, j^2 c) \times M\,(a,\, j^2 b,\, jc) = M\,(a^3 + 3b^3 + 9\,c^3 - 9\,a\,b\,c, 0, 0) \in E$$

4. Déterminer, quand il existe, l'inverse de $M\,(a,b,c)$

On a : $\det M\,(a,b,c) = a^3 + 3b^3 + 9\,c^3 - 9\,a\,b\,c$ (en développant, par exemple, par rapport à la troisième colonne ou par la règle de Sarrus). Si ce déterminant est non nul, on a (d'après la question précédente) : $M^{-1}\,(a,b,c) = \dfrac{1}{\det M\,(a,b,c)} M\,(a,\, jb,\, j^2 c) \times M\,(a,\, j^2 b,\, jc)$

5. Déterminer les valeurs propres de $M\,(a,b,c)$. A quelle condition ces valeurs propres sont-elles distinctes ?

On a : $\det\big(M\,(a,b,c) - \lambda\, I\big) = \det\big(M\,(a-\lambda, b, c)\big)$ et

$\det\big(M\,(a-\lambda,b,c)\big) = (a - \lambda + b\,\theta + c\,\theta^2)(a - \lambda + b\, j\,\theta + c\, j^2\,\theta^2)(a - \lambda + b\, j^2\theta + c\, j\theta^2)$, où $\theta = \sqrt[3]{3}$. Les trois valeurs propres sont donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 = a + b\,\theta + c\,\theta^2 \\ \lambda_2 = a + b\, j\, \theta + c\, j^2\, \theta^2 \\ \lambda_3 = a + b\, j^2\theta + c\, j\theta^2 \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow b = c\, j^2\, \theta \\ \lambda_1 = \lambda_3 \Leftrightarrow b = c\, j\ \ \theta \\ \lambda_3 = \lambda_2 \Leftrightarrow b = c\ \theta \end{cases}$ et ces trois expressions donnent la même relation, à savoir : $b^3 = 3c^3$. En conclusion, ces valeurs propres sont distinctes si et seulement si : $b^3 \neq 3c^3$